ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ MAI HƯƠNG

MỘT SỐ KẾT QUẢ MỚI TRONG HÌNH HỌC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ MAI HƯƠNG

MỘT SỐ KẾT QUẢ MỚI TRONG HÌNH HỌC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Mở đầu

Hình học là một trong những môn khoa học xuất hiện rất sớm của nhân loại. Nhiệm vụ của hình học có thể được mô tả ngắn gọn là trả lời cho các câu hỏi về hình dạng, kích thước, vị trí tương đối của các hình khối, và các tính chất của không gian.

Tính đến thế kỷ XXI này, Hình học đã vượt ra rất xa khuôn khổ ban đầu, và phát triển rực rỡ thành rất nhiều nhánh hiện đại, trừu tượng, cùng những ứng dụng to lớn vào thực tiễn, như Vật lý và nhiều phân ngành Toán học.

Hình học là một môn học rất quan trọng trong chương trình Toán phổ thông và các trường đại học sư phạm. Các kết quả về Hình học sơ cấp là kinh điển và đã là nền tảng cho Toán học, khoa học, và sự phát triển tư duy. Sự lâu đời của Hình học sơ cấp đôi khi làm nảy sinh quan niệm là nó đã là cũ kỹ và không còn phát triển được nữa. Luận văn này được thực hiện nhằm phủ định quan niệm đó. Dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ, luận văn này có mục đích trình bày những kết quả nghiên cứu khoa học mới về Hình học sơ cấp, bao gồm hai khía cạnh, đó là, thứ nhất, là các kết quả mới liên quan đến tứ giác và đường tròn, thứ hai là các bất đẳng thức cho đa giác mà một phần trong đó là dành để thảo luận về đa giác đều.

Ngoài các phần Mở đầu, Kết luận, Tài liệu tham khảo, nội dung của luận văn được trình bày trong ba chương:

- *Chương 1. Một số kết quả mới về tứ giác*. Chương này sẽ trình bày các kết quả mới về tứ giác có hai đường chéo vuông góc, các vấn đề về tứ giác và đường tròn như tứ giác ngoại tiếp và đường tròn chín điểm. Tiếp đó, một số vấn đề về đa giác nội tiếp conic sẽ được thảo luận.

- *Chương 2. Định lý Pascal và lục giác nội - ngoại tiếp*. Trình bày các kết quả về Định lý Pascal, về ba đường nối tâm đồng quy và lục giác nội - ngoại tiếp.

- *Chương 3. Một số bất đẳng thức trong hình học*. Chương này dành để trình bày về một số bất đẳng thức trong hình học, bao gồm khối tâm và bất đẳng thức Klamkin, bất đẳng thức của Garfunkel và mở rộng bất đẳng thức hình học qua số phức.

Tác giả hi vọng rằng luận văn này có thể làm tài liệu tham khảo hữu ích cho những ai quan tâm đến Hình học sơ cấp và ứng dụng. Nó sẽ có ích trong việc bồi dưỡng giáo viên, các học sinh khá giỏi, và những ai quan tâm đến toán sơ cấp và muốn mở rộng nhãn quan nói chung.

Luận văn này đã được tác giả đầu tư nghiên cứu dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ nhưng do nhiều lí do, luận văn chắc chắn sẽ còn những thiếu sót nhất định. Tác giả hi vọng sẽ nhận được nhiều đóng góp của các quý Thầy Cô, các anh chị em đồng nghiệp để luận văn này hoàn chỉnh hơn.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 5 năm 2017

Tác giả

Phạm Thị Mai Hương

Chương 1

Một số kết quả mới về tứ giác

1.1 Tứ giác có hai đường chéo vuông góc

Trong mục này chúng tôi trình bày một số kết quả về tứ giác có hai đường chéo vuông góc. Tài liệu tham khảo chính của mục này là [2].

Định lí 1.1.1. *Tứ giác lồi ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau khi và chỉ khi* $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

Chứng minh. Giả thiết $AC\perp BD$ và $K=AC\times BD$. Theo Định lý Pythagore ta có

$$AB^2+CD^2=KA^2+KB^2+KC^2+KD^2=KA^2+KD^2+KB^2+KC^2=AD^2+BC^2.$$

Ngược lại, giả thiết $AB^2+CD^2=AD^2+BC$. Đặt $\alpha=\angle AKB$. Khi đó ta biểu diễn

$$\begin{aligned} KA^2+KB^2-2KA.KB\cos\alpha+KC^2+KD^2-2KC.KD\cos\alpha &= AB^2+CD^2\\ KA^2+KD^2+2KA.KD\cos\alpha+KC^2+KB^2+2KC.KB\cos\alpha &= AD^2+BC^2. \end{aligned}$$

Vậy $(KA.KB+KC.KD+KA.KD+KB.KC)\cos\alpha=0$. Từ đây suy ra $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ và $AC\perp BD$. □

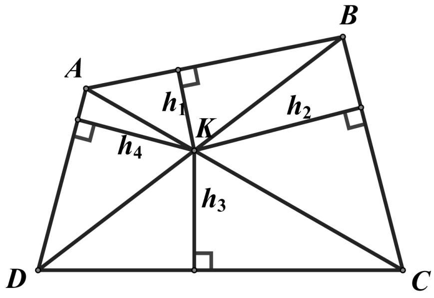
Hệ quả 1.1.1. *Cho tứ giác lồi ABCD với* $K=AC\times BD$. *Gọi* M,N,P,Q *là trung điểm cạnh AB, CD, BC, DA, tương ứng, và ký hiệu* $m_1=KM$, $m_2=KP$, $m_3=KN$, $m_4=KQ$. *Khi đó* $m_1^2+m_3^2=m_2^2+m_4^2$ *nếu và chỉ nếu* $AC\perp BD$.

Chứng minh. Dễ dàng chỉ ra $m_1^2+m_3^2=m_2^2+m_4^2$ nếu và chỉ nếu

$$AB^2+CD^2=BC^2+DA^2$$

hay $AC\perp BD$ theo Định lý 1.1.1. □

Định lí 1.1.2. *Cho tứ giác lồi ABCD với* $K=AC\times BD$. *Gọi* h_1, h_2, h_3, h_4 *là độ dài bốn đường cao hạ từ đỉnh K xuống cạnh* AB,BC,CD,DA *của tam giác KAB, KBC, KCD, KDA, tương ứng. Khi đó* $\dfrac{1}{h_1^2}+\dfrac{1}{h_3^2}=\dfrac{1}{h_2^2}+\dfrac{1}{h_4^2}$ *nếu và chỉ nếu* $AC\perp BD$.



Chứng minh. Đặt $a = KA, b = KB, c = KC, d = KD, \alpha = \angle AKB$. Biến đổi hệ thức

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_3^2} &= \frac{AB^2}{a^2b^2\sin^2\alpha} + \frac{CD^2}{c^2d^2\sin^2\alpha} \\
&= \frac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}{a^2b^2\sin^2\alpha} + \frac{c^2+d^2-2cd\cos\alpha}{c^2d^2\sin^2\alpha} \\
&= \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)\frac{1}{\sin^2\alpha} - \left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}\right)\frac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.
\end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_4^2} = \left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{a^2}\right)\frac{1}{\sin^2\alpha} + \left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{da}\right)\frac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Như vậy, hệ thức

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_3^2} = \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_4^2}$$

tương đương

$$\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cD}+\frac{1}{da}\right)\frac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0$$

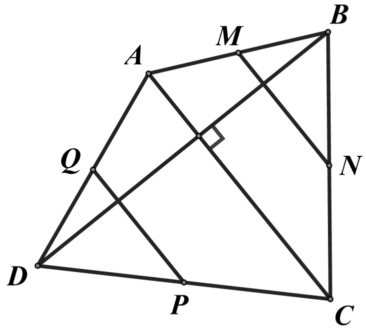
hay $\cos\alpha = 0$, nhưng điều này hoàn toàn tương đương với điều kiện $AC \perp BD$. □

Định lí 1.1.3. *Tứ giác lồi ABCD có đường chéo AC và BD vuông góc với nhau khi và chỉ khi*

$$\angle KAB + \angle KBA + \angle KCD + \angle KDC = \pi = \angle KAD + \angle KDA + \angle KBC + \angle KCB.$$

Chứng minh. Nếu $AC \perp BD$ thì $\angle KAB + \angle KBA + \angle KCD + \angle KDC = \pi$. Ngược lại, giả thiết $\angle KAB + \angle KBA + \angle KCD + \angle KDC = \pi$. Khi đó $\pi = \pi - \alpha + \pi - \alpha$. Vậy $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ và suy ra $AC \perp BD$. □

Bổ đề 1.1.1. *Tứ giác lồi ABCD. Gọi M, N, P, Q là trung điểm cạnh AB, BC, CD, DA, tương ứng. Khi đó $AC \perp BD$ nếu và chỉ nếu $MP = NQ$.*



Chứng minh. Vì MN và PQ cùng song song và bằng $\dfrac{AC}{2}$ nên tứ giác $MNPQ$ luôn luôn là hình bình hành. Vậy $AC \perp BD$ khi và chỉ khi $MNPQ$ là hình chữ nhật. Như vậy $AC \perp BD$ khi và chỉ khi $MP = NQ$. □

Định lí 1.1.4. *Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M,N,P,Q là trung điểm cạnh AB, CD, BC, DA, tương ứng. Hạ $MM_1 \perp CD$, $NN_1 \perp AB$, $PP_1 \perp DA$ và $QQ_1 \perp BC$. Khi đó, hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau khi và chỉ khi 8 điểm M,N,P,Q, M_1,N_1,P_1,Q_1 cùng nằm trên một đường tròn.*

Chứng minh. Nếu $AC \perp BD$ thì $MN = PQ$ theo Bổ đề 1.1.1. Gọi O là giao điểm giữa MN và PQ. Khi đó O là trung điểm của MN, PQ. Dễ dàng suy ra

$$OM = ON = OP = OQ = OM_1 = ON_1 = OP_1 = OQ_1 = \frac{MN}{2}.$$

Vậy tám điểm M,N,P,Q, M_1,N_1,P_1,Q_1 cùng nằm trên đường tròn tâm O bán kính $\dfrac{MN}{2}$. Ngược lại, giả thiết 8 điểm M,N,P,Q, M_1,N_1,P_1,Q_1 cùng nằm trên một đường tròn. Vì $\angle MM_1N = \dfrac{\pi}{2} = \angle PP_1Q$ nên MN và PQ là hai đường kính của đường tròn 8 điểm trên. Vậy $MN = PQ$. Từ đó suy ra $AC \perp BD$ theo Bổ đề 1.1.1. □

Định lí 1.1.5. *Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M,N,P,Q là trung điểm cạnh AB, CD, BC, DA, tương ứng. Hạ $MM_1 \perp CD$, $NN_1 \perp AB$, $PP_1 \perp DA$ và $QQ_1 \perp BC$. Khi đó, từng nhóm ba đường thẳng (MM_1, QQ_1, AC), (NN_1, PP_1, AC), (MM_1, PP_1, BD), (NN_1, QQ_1, BD) đồng quy.*

Chứng minh. Dựng hệ tọa độ Kxy, trong đó $K = AC \times BD$. Giả sử $A(a,0)$, $B(0,b)$, $C(c,0)$, $D(0,d)$. Đường thẳng MM_1 đi qua trung điểm M của đoạn AB và vuông góc với cạnh CD có phương trình $c\left(x - \dfrac{a}{2}\right) - d\left(y - \dfrac{b}{2}\right) = 0$. Hiển nhiên MM_1 cắt AC tại điểm $E\left(\dfrac{ac-bd}{2c}, 0\right)$ và cắt BD tại điểm $H\left(0, \dfrac{bd-ac}{2d}\right)$. Đường thẳng QQ_1 đi qua trung điểm Q của đoạn AD và vuông góc với cạnh CB có phương trình

$c\left(x-\dfrac{a}{2}\right)-b\left(y-\dfrac{d}{2}\right)=0$. Hiển nhiên QQ_1 cắt AC cũng tại điểm $E\left(\dfrac{ac-bd}{2c},0\right)$ và cắt BD tại điểm $G\left(0,\dfrac{bd-ac}{2b}\right)$.

Hoàn toàn tương tự, NN_1, PP_1 cùng cắt AC tại điểm $F\left(\dfrac{ac-bd}{2a},0\right)$ và NN_1 cắt BD cũng tại điểm $G\left(0,\dfrac{bd-ac}{2b}\right)$, còn PP_1 cắt BD tại điểm $H\left(0,\dfrac{bd-ac}{2d}\right)$.

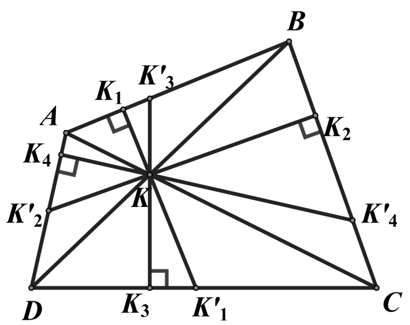
Hiển nhiên $KA.KF = KC.KE = KB.KG = KD.KH$. Như vậy, tứ giác $EGFH$ là ảnh của $ABCD$ trong phép nghịch đảo tâm K. □

Định lí 1.1.6. *Cho tứ giác lồi $ABCD$ và $K = AC \times BD$. Gọi K_1, K_2, K_3, K_4 là chân đường vuông góc hạ từ K xuống AB, BC, CD, DA, tương ứng. Khi đó ta có hai kết quả sau:*

(1) *$AC \perp BD$ khi và chỉ khi bốn điểm K_1, K_2, K_3, K_4 cùng nằm trên một đường tròn.*

(2) *Giả sử KK_1, KK_2, KK_3, KK_4 kéo dài cắt CD, DA, AB, BC tại K_1', K_2', K_3', K_4' tương ứng. Tám điểm K_1, K_1', K_2, K_2', K_3, K_3', K_4, K_4' cùng nằm trên một đường tròn.*

(3) *Tứ giác $K_1'K_2'K_3'K_4'$ là một hình chữ nhật.*



Chứng minh. (1) Vì $AC \perp BD$ nên $\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle D_1 = \pi$. Từ đây suy ra kết quả $\angle K_{41} + \angle K_{21} + \angle K_{42} + \angle K_{22} = \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle D_1 = \pi$. Ngược lại, giả thiết tứ giác $K_1K_2K_3K_4$ nội tiếp trong đường tròn. Khi đó

$$\angle K_{41} + \angle K_{21} + \angle K_{42} + \angle K_{22} = \pi.$$

Từ đó có $\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle D_1 = \pi$ và suy ra $AC \perp BD$ theo Định lý 1.1.3.

(2) Dựng hệ tọa độ Kxy, trong đó $K = AC \times BD$. Giả sử $A(a,0)$, $B(0,b)$, $C(c,0)$, $D(0,d)$. Phương trình đường thẳng $AB : bx + cy = cd$, $CD : dx + cy = cd$ và KK_1 : $ax - by = 0$. Tọa độ

$$K_1\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right) \quad \text{và} \quad K_1'\left(\frac{bcd}{ac+bd}, \frac{acd}{ac+bd}\right).$$

Dễ dàng tính được

$$p = KK_1.KK_1' = \frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{|cd|\sqrt{a^2+b^2}}{|ac+bd|} = \frac{|abcd|}{|ac+bd|}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $KK_2.KK_2' = KK_3.KK_3' = KK_4.KK_4'$ đều bằng $\dfrac{|abcd|}{|ac+bd|}$. Từ đó suy ra rằng, tám điểm K_1, K_1', K_2, K_2', K_3, K_3', K_4, K_4' cùng nằm trên một đường tròn. Chú ý rằng,

$$p = \frac{KA.KB.KC.KD}{KA.KC + KB.KD}.$$

(3) Dễ dàng tính được $K_2'\left(\dfrac{abd}{ac+bd}, \dfrac{acd}{ac+bd}\right)$. Như vậy $K_1'K_2' \parallel AC$. Tương tự $K_3'K_4' \parallel AC$, $K_2'K_3' \parallel BD$, $K_4'K_1' \parallel BD$. Từ đây suy ra, tứ giác $K_1'K_2'K_3'K_4'$ là một hình chữ nhật. ☐

Hệ quả 1.1.2. *Cho tứ giác lồi $ABCD$ với $AC \perp BD$. Hai nhóm tám điểm M,N,P,Q, M_1,N_1,P_1,Q_1 và K_1,K_1', K_2,K_2', K_3,K_3', K_4,K_4' trùng nhau khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn.*

Chứng minh. Hai nhóm tám điểm M,N,P,Q,M_1,N_1,P_1,Q_1 và K_1,K_1', K_2,K_2', K_3,K_3', K_4,K_4' trùng nhau khi và chỉ khi E,F,G,H đều trùng K hay $ac = bd$. Điều này tương đương tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn. ☐

1.2 Tứ giác ngoại tiếp đường tròn

Chủ đề của mục này là tứ giác ngoại tiếp đường tròn. Chúng tôi sẽ trình bày một số định lý quan trọng kèm theo chứng minh. Chúng tôi trình bày dựa vào tài liệu [2].

Định nghĩa 1.2.1. Một tứ giác có 4 cạnh cùng tiếp xúc với một đường tròn được gọi là *tứ giác ngoại tiếp đường tròn.*

Định lí 1.2.1. *Tứ giác lồi $ABCD$ ngoại tiếp được một đường tròn khi và chỉ khi*

$$AB + CD = AD + BC.$$